ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Date: 07-03-14

Αλγεβρικές καμπύλες (τι θα δούμε)

Άλγεβρα $\xleftrightarrow{\text{πολυώνυμο}}$ Γεωμετρία

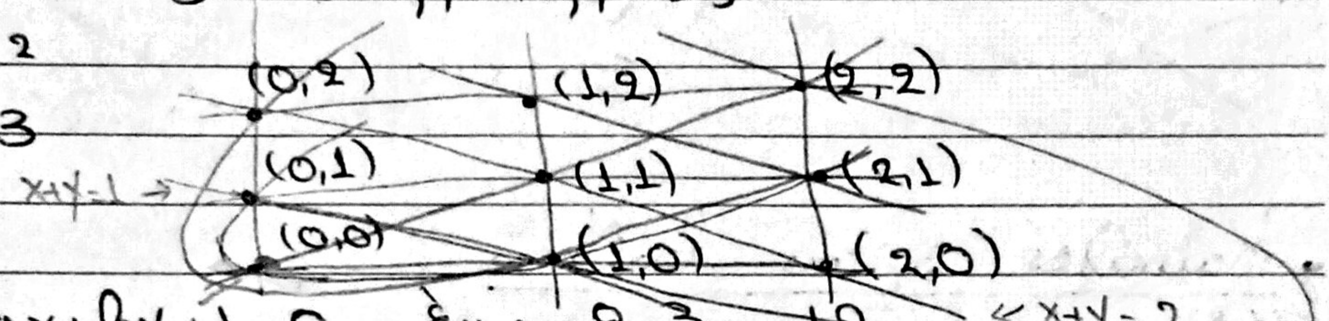
$K[x,y]$ $\qquad$ $K^2 = \{(x,y) \mid x,y \in K\}$.

$f(x,y)$ $\qquad$ καρτεσιανό επίπεδο

Στην αρχή $K = \mathbb{R}$ έπειτα $K = \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_3 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$

$\mathbb{Z}_3^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z}_3\}$ 9 στοιχεία ($\begin{smallmatrix}3 \text{ το } x\\ 3 \text{ το } y\end{smallmatrix}$)

$\mathbb{Z}_3^2$



ευθεία: $ax+by+\gamma=0$ έχω $\frac{8\cdot 3}{2} = 12$

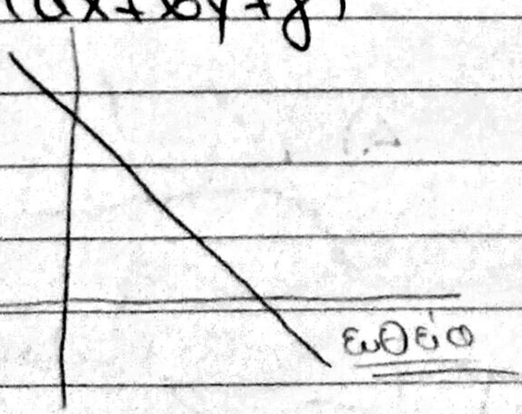
σε κάθε ευθεία ανήκουν 3 σημεία.

π.χ. Έστω το πολυώνυμο $f(x,y)$ μπορώ να αντιστοιχήσω στο συγκεκριμένο πολυώνυμο την αλγεβρική καμπύλη

$V(f) = \{(x_0,y_0) \in K^2 \mid f(x_0,y_0) = 0\}$

Θα δουλέψουμε στον $\mathbb{R}^2$.

$V(ax+by+\gamma)$



□

πχ. Έχουμε το πολυώνυμο

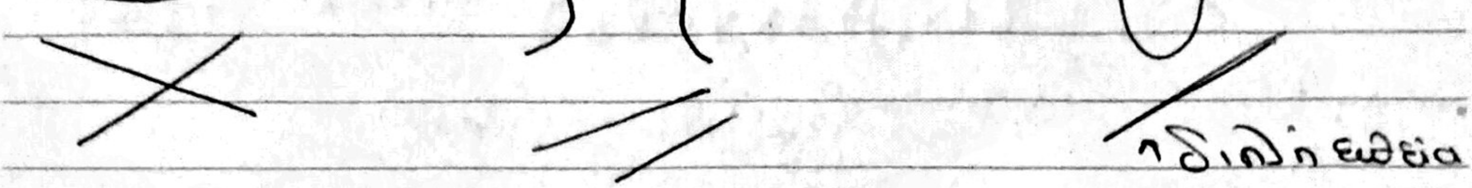
$$x^3+xy^2-xy^3+7y-2017 = 4$$

$$deg(x^3+xy^2-xy^3+7y-2017) = 4 \quad \square$$

• **Καμπύλη δευτέρου βαθμού**

$$V(ax^2+by^2+\gamma xy+\delta x+\varepsilon y+\zeta)$$

έλλειψη — υπερβολή — παραβολή



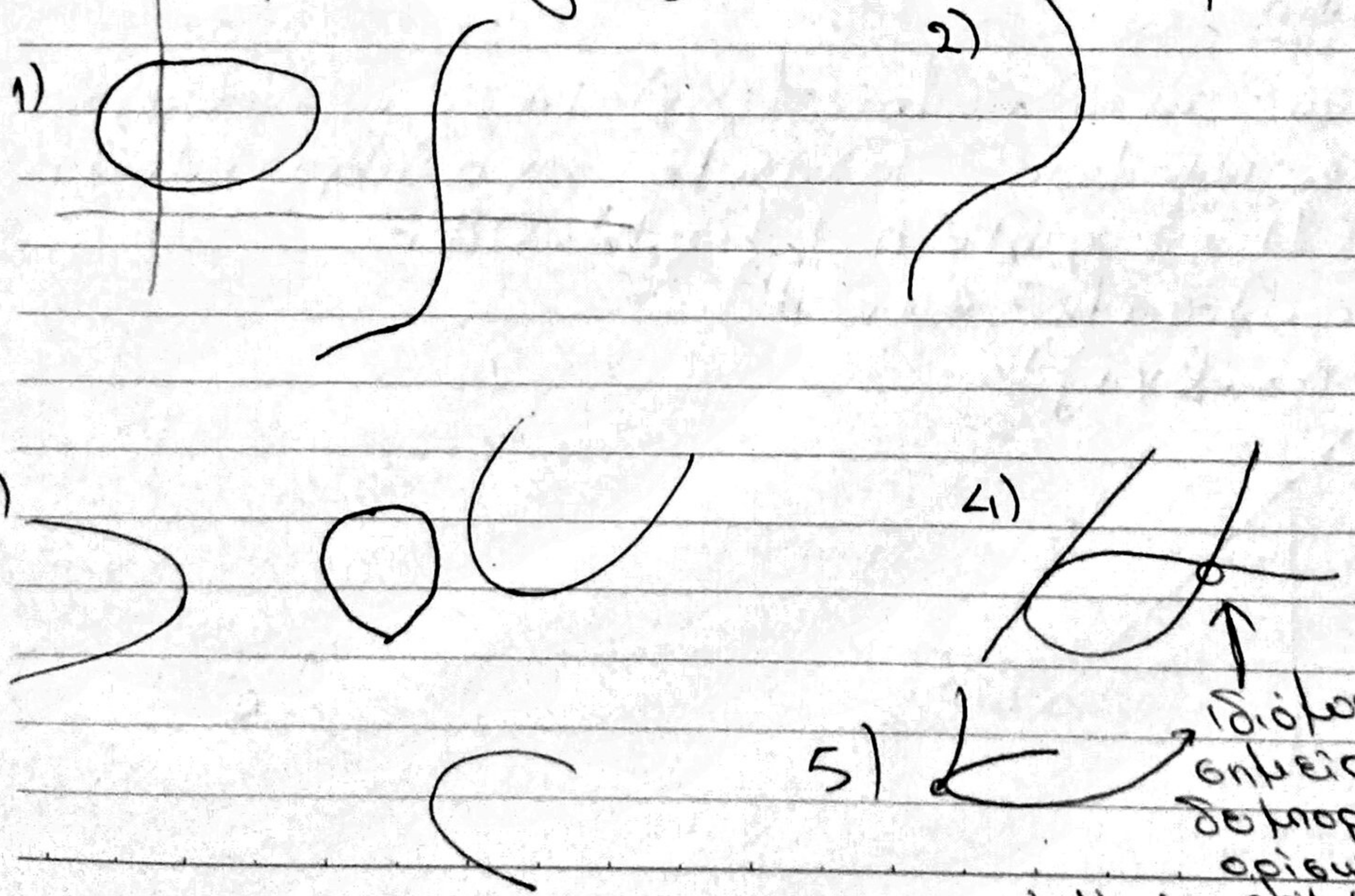
διπλή ευθεία

• **Καμπύλες τρίτου βαθμού**

$V(f)$ $\quad deg\, f = 3$

Πως μπορεί να μοιάζουν;

$V(y-x^3)$

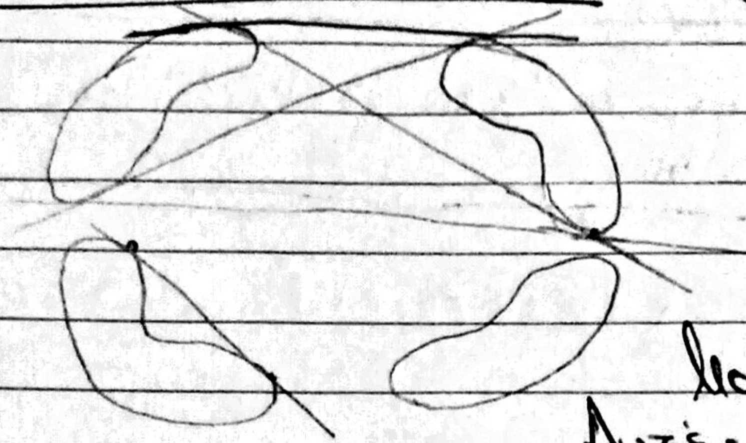


ιδιόμορφο σημείο δεν μπορώ να ορίσω εφα-
πτόμενη
αλλά όμως ναι

Date:

- Ασύμπτωτες δεν έχει μόνο η υπερβολή, αλλά και ο κύκλος και η έλλειψη. Στην "παραβολή" δεν την βλέπουμε γιατί τείνει στο ∞. Επίσης και οι καμπύλες τρίτου βαθμού έχουν ασύμπτωτες.

- Καμπύλες 4ου βαθμού

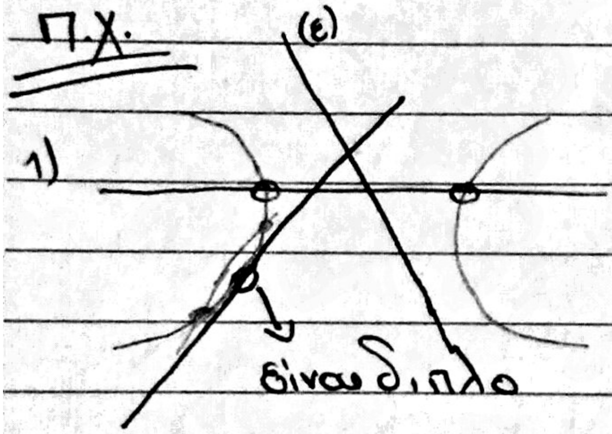


Διεφαπτόμενη

έχει 28 διεφαπτόμενες. Ανάμεσα σε 2 "φασόλια" έχω 4. Ανάμεσα στις 4 έχω 24. Μου λείπουν άλλες 4. Αυτές ενώνουν το ίδιο "φασόλι"

Π.χ.

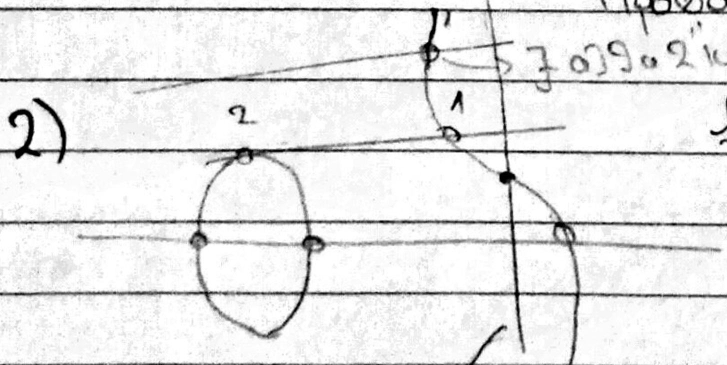
1)



Αν πάρω την ευθεία (ε) στο $\mathbb{R}^2$ δεν τέμνει την υπερβολή. Αν πάω πάνω από τους μιγαδικούς $\mathbb{C}^2$, τέμνει την υπερβολή.

Προβολικό επίπεδο □

2)



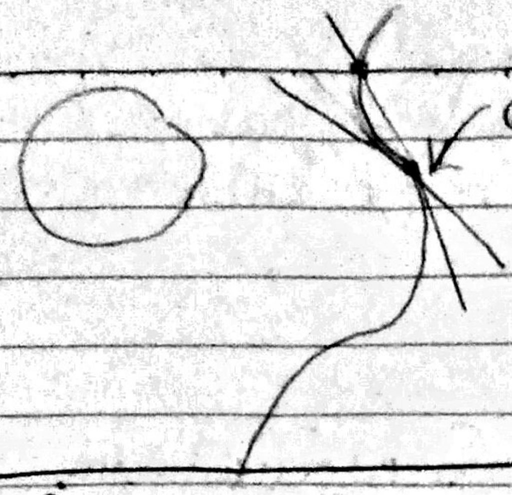
$f(x,y)=0$

$ax+by+\gamma=0$

λύνοντας το σύστημα θα βρούμε 3, το ένα φαίνεται, τα άλλα 2 $\to \infty$, πάνω από τον $\mathbb{C}^2$.

□

3)



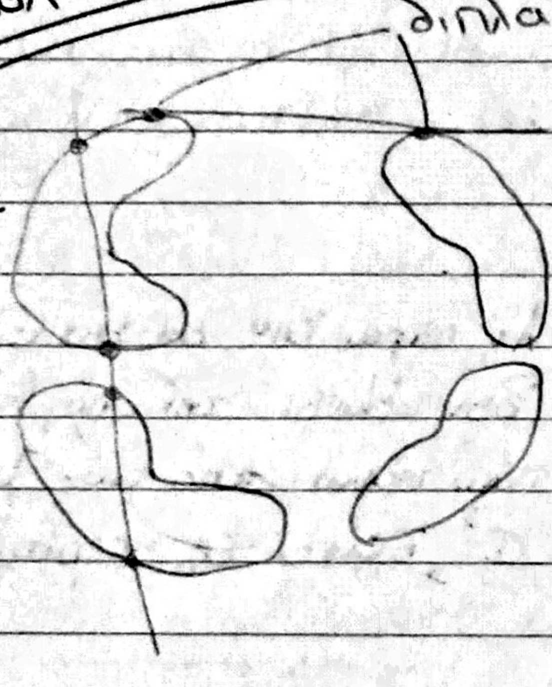
Κάθε τριτοβάθμια που δεν έχει ιδιόμορφο σημείο έχει 9 σημεία καμπής

Προσοχή

διπλά

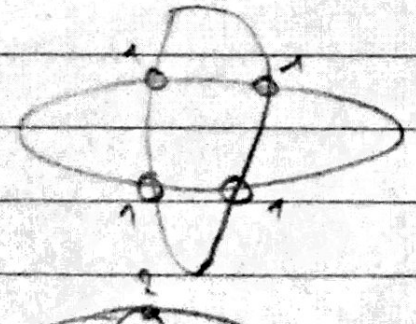
4 σημεία τομής

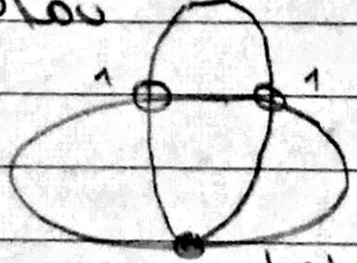
π.χ



καμπύλος 4ου βαθμού

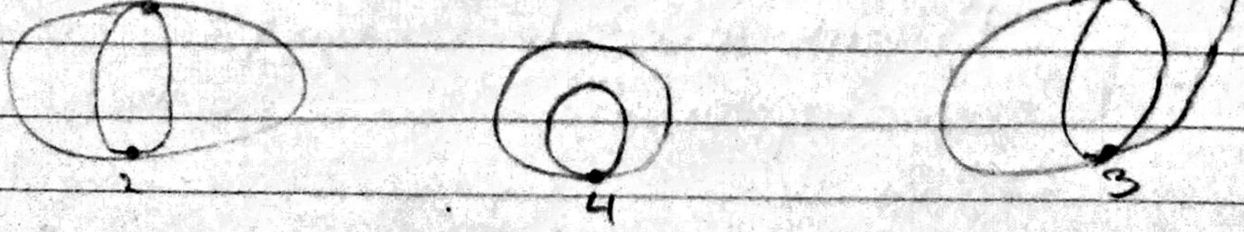
2) καμπύλος 2ου βαθμού



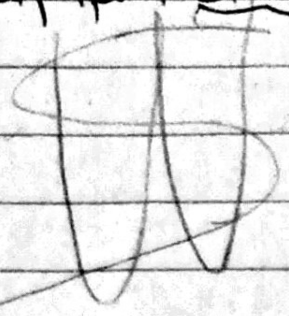


4 σημεία

ένωση 2 καμπυλών 2ου βαθμού



• Θεώρημα Bezout



μη κοινά σημεία

• Pascal 6 σημεία σε μια καμπύλη, δημιουργώ το εξάγωνο προεκτείνοντας τις απέναντι κορυφές (ανά 2) σχηματίζονται 3 σημεία που είναι πάντα συνευθειακά.

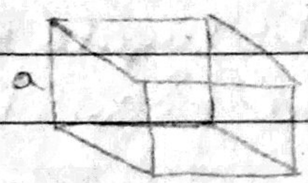
• Brianchon

——————*

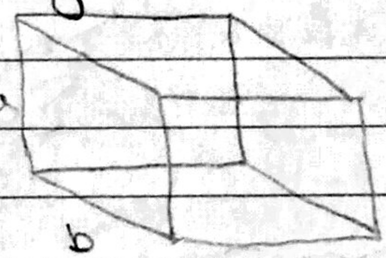
Εύδοξος: ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς

Διπλασιασμός του κύβου ⊛

Έχουμε κύβο με όγκο V. Θέλουμε να βρούμε κύβο που να έχει διπλάσιο όγκο 2V.



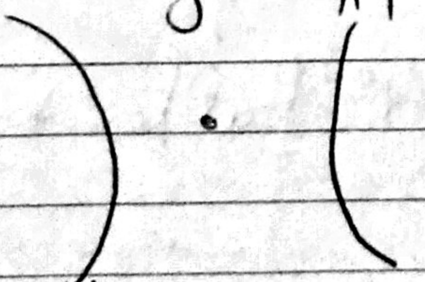
$V = a^3$



$2V = b^3$

ο Αρχύτας: δάσκαλος του Ευδόξου έδωσε πρώτος μια πολύπλοκη απάντηση.

Ο Εύδοξος χρησιμοποίησε την εξής καμπύλη με εξίσωση → για την λύση του ⊛



$$b^2 y^4 = a^4 (x^2 + y^2)$$

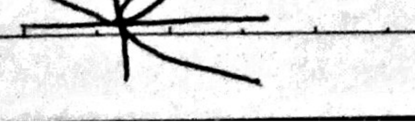
→ όχι υπερβολή έχει 3 σημεία

Μέναιχμος έδωσε μια πιο απλή λύση του ⊛

$x^2 = ay$

$y^2 = 2ax$

$x^4 = a^2 y^2 = a^2(2ax)$



→ $\sqrt[3]{2}a$

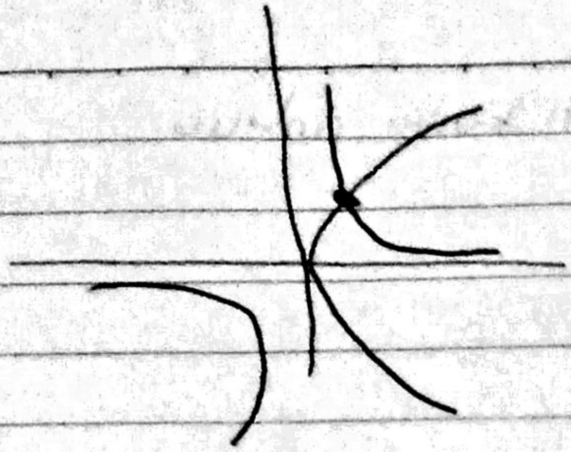
$x^4 = x 2a^3$

$x^4 - x2a^3 = 0$

$x(x^3 - 2a^3) = 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}a$

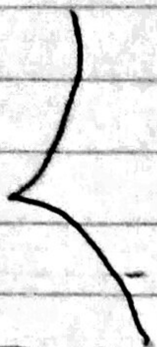
Date:
No:



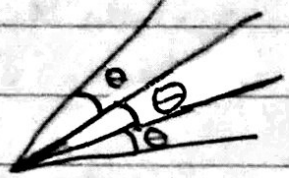
$y^2 = 2ax$

$xy = 2a^2$

- Κισσοειδής του Διοκλή



- Τριχοτόμηση της γωνίας

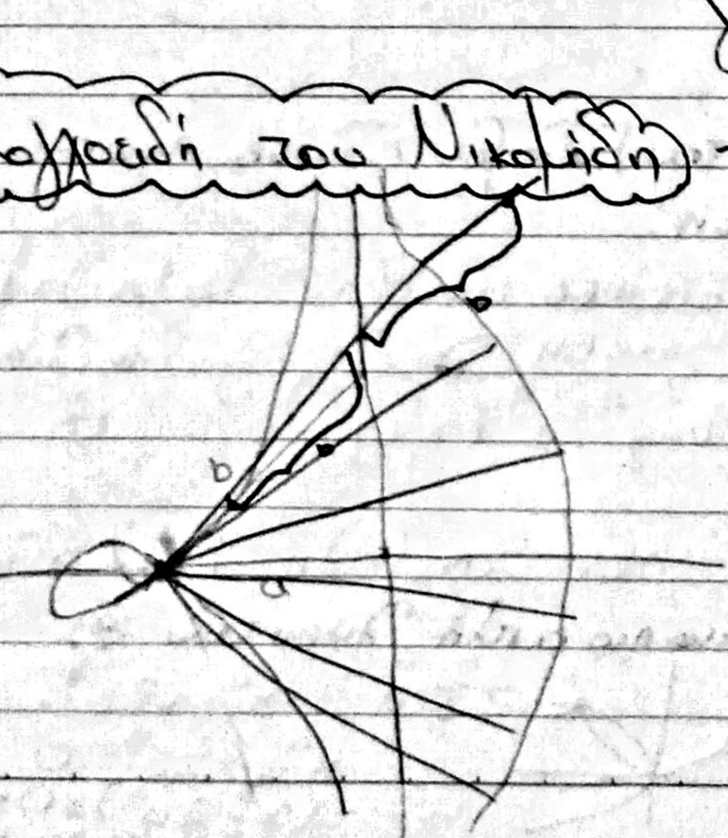


$\phi = 3\theta$

δεν γίνεται με χάρακα και διαβήτη, ενώ η διχοτόμηση γίνεται.

- Κογχοειδή του Νικομήδη → Χρησιμοποιήθηκε στην τριχοτόμηση της γωνίας

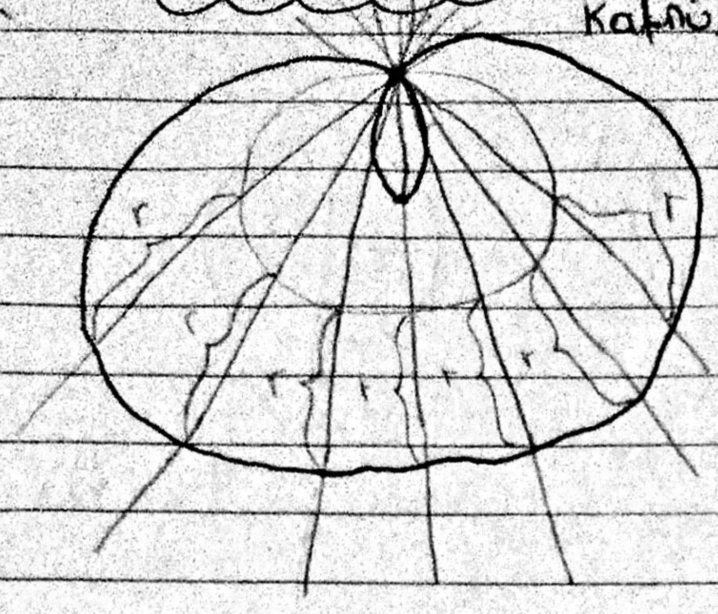
4ου βαθμού καμπύλη



Date:
No:

• Αρχιμήδης

Καμπύλη 4ου βαθμού



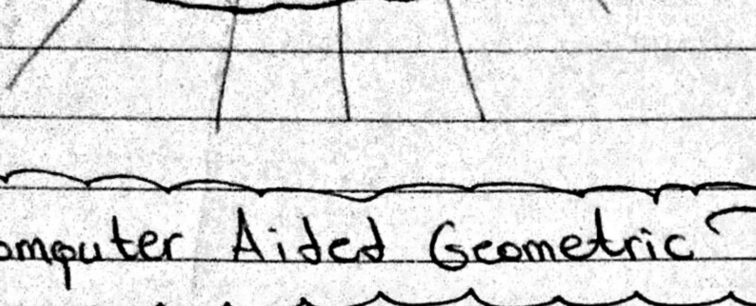
τη χρησιμοποίησε για την τριχοτόμηση της γωνίας

• Computer Aided Geometric Design

1) Καμπύλη του Bezier (μηχανικός της Renault, σχεδίαζε αυτοκίνητα)

$$x(t) = (1-t)^3 x_1 + 3t(1-t)^2 x_2 + 3t^2(1-t)x_3 + t^3 x_4$$
$$y(t) = (1-t)^3 y_1 + 3t(1-t)^2 y_2 + 3t^2(1-t)y_3 + t^3 y_4$$
$$0 \le t \le 1$$

τα σημεία των εφαπτομένων



αν βάζω όπου $t=0$

αν βάλω στις εξισώσεις $t=1$

• Ελλειπτικές καμπύλες

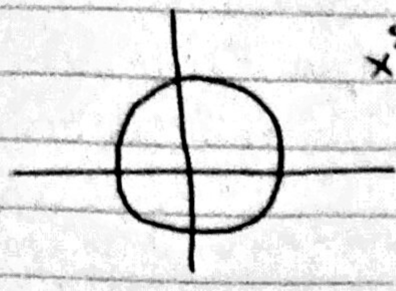
Lenstra τις χρησιμοποίησε για να σπάσει τους πραγματικούς αριθμούς σε πρωτογενή ανάλυση.

Date:

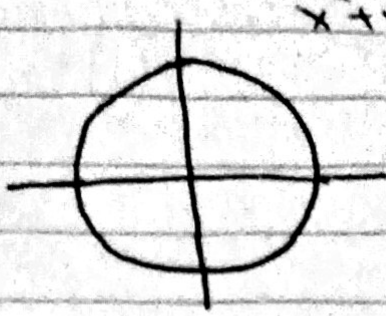
Αλγεβρικός Καμπύλος (κώδικες διόρθωσης λάθους)

$\mathbb{R}^2$

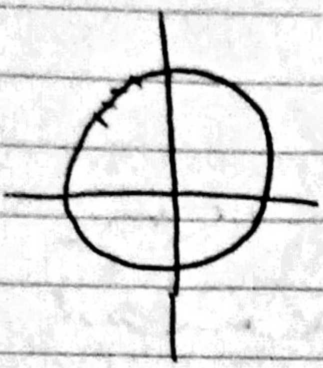
$x^2+y^2=1$



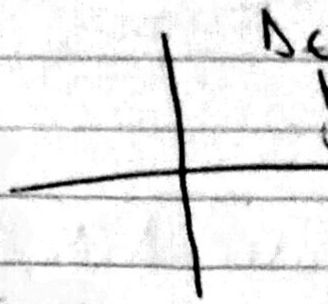
$x^2+y^2=3$



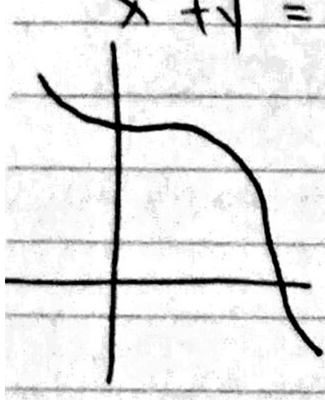
$\mathbb{Q}^2$

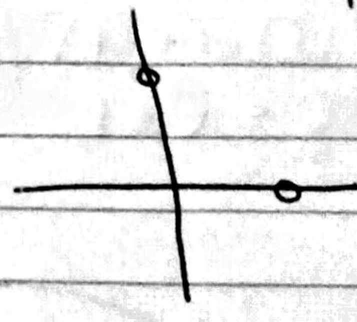


Δεν εμφανίζεται τίποτα

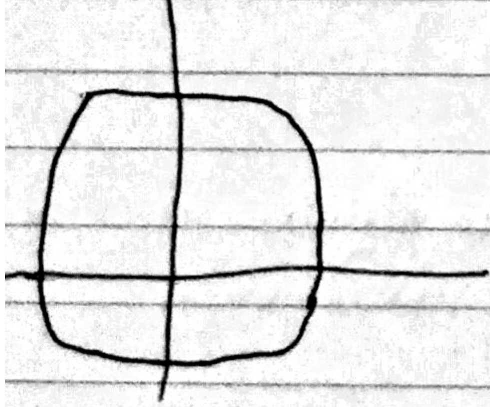


$x^3+y^3=1$ στους πραγματικούς | πάνω από τους ρητούς

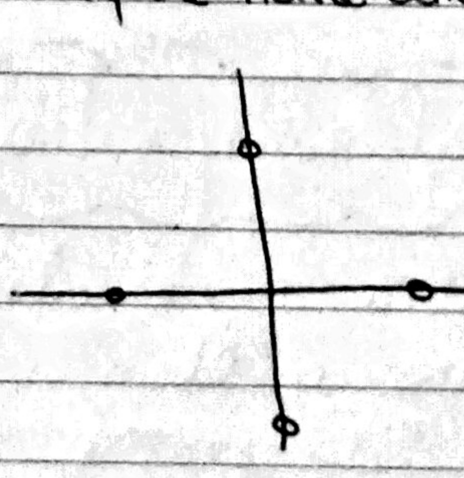




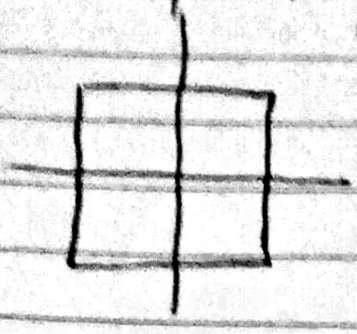
$x^4+y^4=1$ πάνω από τους πραγματικούς



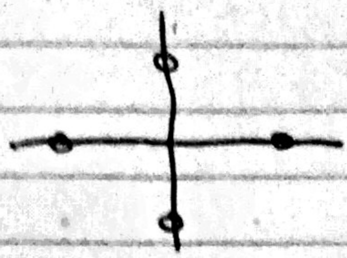
$x^4+y^4=1$ πάνω από τους ρητούς



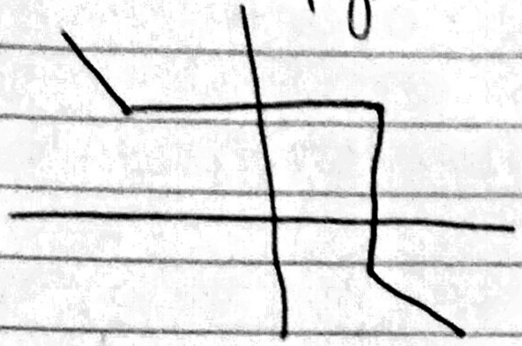
$x^{2016}+y^{2016}=1$ στους πραγματικούς



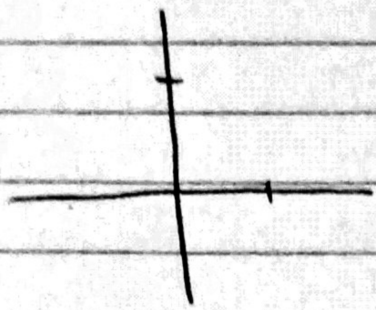
$x^{2016}+y^{2016}=1$ πάνω από ρητούς



$x^{2017}+y^{2017}=1$ πάνω από τους πραγματικούς



$x^{2017}+y^{2017}=1$ πάνω από τους ρητούς



Καμπύλες του Fermat

$x^n+y^n=z^n$ $n>2$ δεν έχει καμία λύση από τις προφανείς ή το $x=0$ ή $y=0$ ή $z=0$

$$x^2+y^2=z^2$$

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2=1$$